TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH
STROJNÍCKA FAKULTA

MATEMATIKA II

Dušan Knežo, Miriam Andrejiová, Zuzana Kimáková

2010

RECENZOVALI: prof. RNDr. Jozef Doboš, CSc.

RNDr. Ján Buša, CSc.

Predhovor

Tento učebný text je určený poslucháčom prvého ročníka bakalárskeho štúdia Strojníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach a tematicky je orientovaný na predmety Aplikovaná matematika a Matematika II. Rovnako dobre však môže poslúžiť poslucháčom Fakulty baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií a Hutníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach.

V učebnom texte sú uvedené podstatné teoretické poznatky potrebné ku riešeniu úloh, riešené príklady a úlohy na riešenie týkajúce sa integrálneho počtu funkcie jednej reálnej premennej (určitý integrál a jeho aplikácie), diferenciálneho počtu funkcie viac premenných, diferenciálnych rovníc a integrálneho počtu funkcie viac premenných. Obsah je dostatočným základom pre štúdium a úspešné absolvovanie spomínaných predmetov.

Obom recenzentom prof. RNDr. Jozefovi Dobošovi, CSc. a RNDr. Jánovi Bušovi, CSc. ďakujeme za dôsledné posúdenie tejto učebnej pomôcky. Ich cenné pripomienky, rady a odporúčania prispeli ku zvýšeniu kvality tejto publikácie.

V Košiciach 16. 10. 2010 Autori

Obsah

Kapitola 1

Určitý integrál

1.1 Pojem určitého integrálu

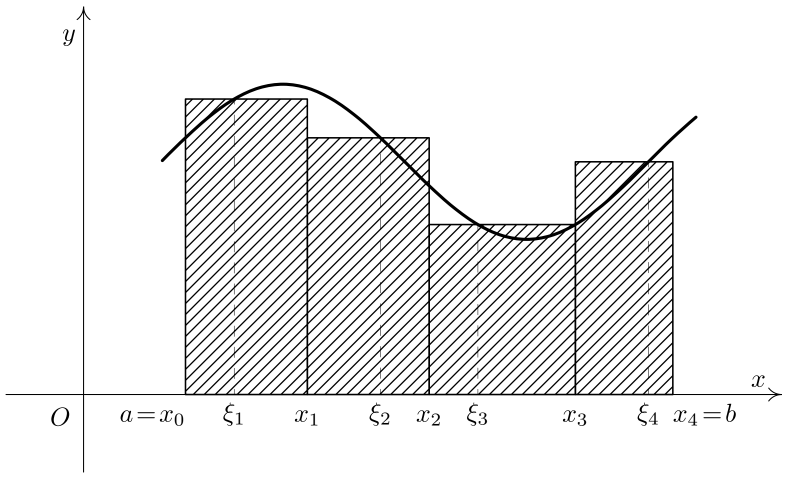
Majme funkciu f a interval $\langle a, b\rangle$, ktorý je podmnožinou definičného oboru funkcie f. Nech je funkcia f ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle$. Ak x_0, x_1, x_2, …, x_n sú čísla, pre ktoré platí

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

hovoríme, že je dané *delenie* D intervalu $\langle a, b\rangle$. Deliace body rozdeľujú interval $\langle a, b\rangle$ na n čiastočných intervalov $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, …, $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$. Označme Δx_i dĺžku i-tého intervalu, t.j. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Zrejme $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$. Nech ξ_1, ξ_2, …, ξ_n sú reálne čísla a nech $\xi_1 \in \langle x_0, x_1\rangle$, $\xi_2 \in \langle x_1, x_2\rangle$,…, $\xi_n \in \langle x_{n-1}, x_n\rangle$. Číslo

$$S_f(D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

nazývame *integrálnym súčtom* funkcie f pre delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ a pre danú voľbu čísel ξ_1, ξ_2, …, ξ_n (skrátene pre danú voľbu čísel ξ) Ak D je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$, číslo $||D|| =$



Obr. 1.1:

$\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ nazývame *normou delenia* D. Ak je pre každé prirodzené číslo n

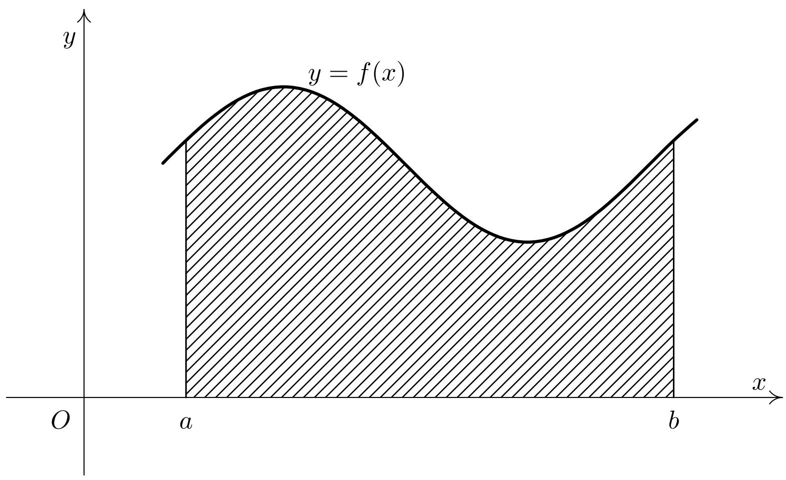
dané jedno delenie D_n intervalu $\langle a, b\rangle$, hovoríme o postupnosti delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Takúto postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ nazývame *normálnou*, ak $\lim\limits_{n\to\infty} ||D_n|| = 0$.

Definícia 1. *Číslo I nazývame určitým integrálom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$, ak pre každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a, b\rangle$ a pre každú voľbu čísel ξ je $\lim\limits_{n\to\infty} S_f\left(D_n\right) = I$.*

Určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde a je dolná hranica integrálu a b je horná hranica integrálu. V prípade, že na intervale $\langle a, b\rangle$ je $f(x) > 0$, tak hodnota určitého integrálu funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ je rovná obsahu krivočiareho lichobežníka určeného osou o_x, grafom funkcie $y = f(x)$ a intervalom $\langle a, b\rangle$ (viď obr. **??**).



Obr. 1.2:

Definícia 2. *Hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$, ak existuje určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$. Ak tento integrál neexistuje, hovoríme, že funkcia f nie je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$.*

Ak teda je funkcia f integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$, tak jej určitý integrál $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je také číslo, že pre každú normálnu postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a pre každú voľbu čísel ξ platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_f\left(D_n\right).$$

Uvedená definícia určitého integrálu pochádza od B. Riemanna, preto sa zvykne hovoriť o Riemannovom, príp. Cauchy-Riemannovom integrále.

1.2 Vlastnosti určitého integrálu

Veta 1. *Ak sú funkcie f a g integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$, tak aj funkcia $f+g$ je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 2. *Ak je funkcia f integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a c je konštanta, tak aj funkcia cf je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 3. *Ak je funkcia f integrovateľná na intervale $\langle a, c\rangle$ a na intervale $\langle c, b\rangle$, tak je integrovateľná aj na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 4. *Nech je funkcia f integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech na intervale $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq 0$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Veta 5. *Nech sú funkcie f a g integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech na intervale $\langle a, b\rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 6. *Nech je funkcia f integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Ak na intervale $\langle a, b\rangle$ platí $m \leq f(x) \leq M$, tak*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Veta 7. *Ak je funkcia f integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$, tak aj funkcia $|f|$ je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

1.3 Postačujúce podmienky integrovateľnosti funkcie

Veta 8. *Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, tak je na tomto intervale integrovateľná.*

Definícia 3. *Hovoríme, že funkcia f je na intervale $\langle a, b\rangle$ po čiastkach spojitá, ak*

- *na intervale $\langle a,b\rangle$ existuje iba konečný počet bodov, v ktorých je funkcia f nespojitá*
- *v každom bode intervalu (a,b) existuje konečná limita funkcie f zľava i sprava*
- *v bode a existuje konečná limita funkcie f sprava*
- *v bode b existuje konečná limita funkcie f zľava*

Veta 9. *Ak je funkcia f po čiastkach spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$, tak je na tomto intervale integrovateľná.*

1.4 Newton-Leibnizov vzorec

Nasledujúca veta poskytuje Newton-Leibnizov vzorec, najúčinnejší nástroj na výpočet určitých integrálov.

Veta 10. *Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$. Nech funkcia F je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech je na intervale (a,b) primitívnou funkciou k funkcii f. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Príklad 1. Vypočítajme integrál $\int_{-1}^{2} (5x^4 - 8x + 3)\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

$$\int_{-1}^{2} (5x^4 - 8x + 3)\,\mathrm{d}x = \left[x^5 - 4x^2 + 3x\right]_{-1}^{2} = 2^5 - 4\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - \Big((-1)^5 - 4\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1)\Big) =$$

$$= 32 - 16 + 6 - (-1 - 4 - 3) = 22 + 8 = 30.$$

Príklad 2. Vypočítajme integrál $\int_{1}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

$$\int_{1}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{4} \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int_{1}^{4} \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{64} + 2\sqrt{4} - \left(\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{16}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 2 = \frac{20}{3}.$$

Príklad 3. Vypočítajme integrál $\int_{0}^{1} \frac{5}{2x^2 + 11x + 12}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Funkcia pod integrálom je rýdzoracionálna funkcia. Primitívnu funkciu k nej nájdeme rozkladom na parciálne zlomky.

$$\int_{0}^{1} \frac{5}{2x^2 + 11x + 12}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{5}{(2x+3)(x+4)}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \left(\frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x+4}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= [\ \ln|2x+3| - \ln|x+4|\ ]_0^1 = \left[\ \ln\left|\frac{2x+3}{x+4}\right|\right]_0^1 = \ln 1 - \ln\frac{3}{4} = -\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3}.$$

Príklad 4. Vypočítajme integrál $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = [\operatorname{tg} x - x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} - \left(-1 + \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}.$$

Úlohy

V úlohách 1.1 – 1.50 vypočítajte určitý integrál.

1.1 $\int\limits_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x$

1.2 $\int\limits_{-1}^3 \left(x + \frac{3}{4}\right)\mathrm{d}x$

1.3 $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$

1.4 $\int\limits_{-4}^{-1} \left(x + \frac{4}{x}\right)^2\mathrm{d}x$

1.5 $\int\limits_{-4}^{-2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

1.6 $\int\limits_1^3 \frac{3x^4 + 2x^3 - x - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1.7 $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)\mathrm{d}x$

1.8 $\int\limits_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 4x + \frac{5}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

1.9 $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + \sqrt{5}\right)\mathrm{d}x$

1.10 $\int\limits_0^2 \left(\sqrt{2t} - \frac{1}{\sqrt{8t}}\right)\mathrm{d}t$

1.11 $\int\limits_1^8 \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

1.12 $\int\limits_0^2 |1 - x|\,\mathrm{d}x$

1.13 $\int\limits_0^3 |1 - 3x|\,\mathrm{d}x$

1.14 $\int\limits_1^2 \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

1.15 $\int\limits_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

1.16 $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,\mathrm{d}x$

1.17 $\displaystyle\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x$

1.18 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}-2}{e^x}\,\mathrm{d}x$

1.19 $\displaystyle\int_0^1 3^x\left(4+x\cdot 3^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$

1.20 $\displaystyle\int_0^1 (2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x$

1.21 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.22 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.23 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x+5\sin^2 x\cdot\cos x-3}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.24 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4\sin x+3\cos x-\frac{2}{\cos^2 x}\right)\,\mathrm{d}x$

1.25 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,\mathrm{d}x$

1.26 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3-4\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.27 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

1.28 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

1.29 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

1.30 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

1.31 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x}{5-\cos x}\,\mathrm{d}x$

1.32 $\displaystyle\int_0^3 \frac{5}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

1.33 $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$

1.34 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

1.35 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

1.36 $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+16}}\,\mathrm{d}x$

1.37 $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,\mathrm{d}x$

1.38 $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

1.39 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$

1.40 $\displaystyle\int_{-5}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+20}}\,\mathrm{d}x$

1.41 $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^2 \frac{1}{\sqrt{2+3t-2t^2}}\,\mathrm{d}t$

1.42 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{4x^2+20x-7}}\,\mathrm{d}x$

1.43 $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x+x^2}\,\mathrm{d}x$

1.44 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

1.45 $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$

1.46 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+x^2-x^3-1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$

1.47 $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x$

1.48 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

1.49 $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{2x^2+3x-2}\,\mathrm{d}x$

1.50 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

1.5 Stredná hodnota funkcie na intervale

Definícia 4. *Nech funkcia f je integrovateľná na $\langle a,b\rangle$. Strednou hodnotou funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$ nazývame číslo*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 11. *Nech je funkcia g nezáporná a integrovateľná na $\langle a,b\rangle$. Nech je funkcia f spojitá na $\langle a,b\rangle$. Potom existuje číslo $\xi\in\langle a,b\rangle$ také, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.6 Integrál ako funkcia hornej hranice

Ak je funkcia f integrovateľná na $\langle a,b\rangle$ a c je ľubovoľné číslo z intervalu $\langle a,b\rangle$, tak môžeme na intervale $\langle a,b\rangle$ definovať funkciu F takto:

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Podobne môžeme na intervale $\langle a,b\rangle$ definovať funkciu $G(x)$ vzťahom

$$G(x) = \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkciou $G(x)$ sa však špeciálne zaoberať nebudeme, pretože $G(x) = -F(x)$ pre každé $x\in\langle a,b\rangle$.

Veta 12. *Ak je funkcia f integrovateľná na $\langle a,b\rangle$, tak funkcia F je spojitá na $\langle a,b\rangle$.*

Veta 13. *Ak je funkcia f spojitá na (a,b), tak na intervale (a,b) je funkcia F diferencovateľná a platí $F'(x) = f(x)$.*

1.7 Substitučná metóda a metóda per partes

Pri výpočte určitých integrálov pomocou Newton-Leibnizovho vzorca potrebujeme nájsť primitívnu funkciu. Tú často počítame substitučnou metódou alebo metódou per partes. Odvodíme si vzorce, ktoré nám umožnia počítať priamo určité integrály týmito metódami.

Veta 14. (SUBSTITUČNÁ METÓDA)
Nech je funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$. Nech je funkcia $\varphi(t)$ spojitá a má spojitú deriváciu $\varphi'(t)$ na intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$. Nech pre každé $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ je $\varphi(t) \in \langle a, b\rangle$. Nech $a = \varphi(\alpha)$ a $b = \varphi(\beta)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 1. Vypočítajme integrál $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

Riešenie.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} 1+x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \\ t_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ t_2 = \sqrt{1+8} = \quad 3 \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{1}{t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{2}}^3 1\,\mathrm{d}t = 2\,[t]_{\sqrt{2}}^3 = 2\left(3-\sqrt{2}\right).$$

Príklad 2. Vypočítajme integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$

Riešenie.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \\ t_1 = \cos 0 \ = 1 \\ t_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = -\int_1^0 t^3\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4}.$$

Príklad 3. Vypočítajme integrál $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x(\ln x + 1)}\,\mathrm{d}x$

Riešenie.

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x(\ln x+1)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \quad t_1 = \ln e \ = 1 \\ \quad t_2 = \ln e^2 = 2\ln e = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \left[t - \ln|t+1|\right]_1^2 = 2 - \ln 3 - (1 - \ln 2) = 1 + \ln\frac{2}{3}.$$

Príklad 4. Vypočítajme integrál $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

Riešenie.

$$\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} e^x-1 &= t^2 \\ e^x\mathrm{d}x &= 2t\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \tfrac{2t\mathrm{d}t}{t^2+1} \\ t_1 &= \sqrt{e^0-1} \quad = 0 \\ t_2 &= \sqrt{e^{\ln 2}-1} = 1 \end{aligned} \right| = \int\limits_0^1 t\cdot\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int\limits_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = 2\left[t-\operatorname{arctg} t\right]_0^1 = 2\left(1-\operatorname{arctg} 1 - 0 + \operatorname{arctg} 0\right) = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 2-\frac{\pi}{2}.$$

Veta 15. (Metóda per partes)
Nech funkcie f a g majú spojité derivácie $f'(x)$ a $g'(x)$ na intervale $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Príklad 5. Vypočítajme integrál $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 8x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

Riešenie.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 8x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cclcl} f(x) & = & 8x, & g'(x) = & \cos 2x \\ f'(x) & = & 8, & g(x) = & \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left[8x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 8\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[4x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin 2x\,\mathrm{d}x = \left[4x\sin 2x - 4\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[4x\sin 2x + 2\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - (0+2\cos 0) = \pi\cdot 1 + 2\cdot 0 - 0 - 2\cdot 1 = \pi - 2.$$

Príklad 6. Vypočítajme integrál $\int\limits_1^2 (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$

Riešenie.

$$\int\limits_1^2 (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cclcl} f(x) & = & \ln x, & g'(x) = & x+1 \\ f'(x) & = & \frac{1}{x}, & g(x) = & \frac{x^2}{2}+x \end{array} \right| = \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right]_1^2 -$$

$$-\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right]_1^2 - \int\limits_1^2 \left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{d}x = \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \left(\frac{x^2}{4}+x\right)\right]_1^2 =$$

$$= 4\cdot\ln 2 - (1+2) - \left(\frac{3}{2}\cdot\ln 1 - \frac{1}{4} - 1\right) = 4\ln 2 - 3 + \frac{1}{4} + 1 = 4\ln 2 - \frac{7}{4}.$$

Úlohy

V úlohách 1.51 – 1.111 vhodnou substitúciou vypočítajte určitý integrál.

1.51 $\int\limits_3^8 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$

1.52 $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,\mathrm{d}x$

1.53 $\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{(2-3x)^3}\,\mathrm{d}x$

1.54 $\int\limits_1^2 \frac{x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$

1.55 $\int\limits_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$

1.56 $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

1.57 $\int\limits_0^4 x\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$

1.58 $\int\limits_0^R \rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$

1.59 $\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1}\,\mathrm{d}x$

1.60 $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

1.61 $\int\limits_0^3 \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

1.62 $\int\limits_1^2 x\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$

1.63 $\int\limits_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,\mathrm{d}x$

1.64 $\int\limits_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,\mathrm{d}x$

1.65 $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x$

1.66 $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$

1.67 $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

1.68 $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x$

1.69 $\int\limits_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{2x+3}+2}\,\mathrm{d}x$

1.70 $\int\limits_1^5 \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x$

1.71 $\int\limits_1^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}x$

1.72 $\int\limits_0^1 x^3\cdot\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$

1.73 $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

1.74 $\int\limits_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}\,\mathrm{d}x$

1.75 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

1.76 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

1.77 $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

1.78 $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

1.79 $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln\rho}{\rho}\,\mathrm{d}\rho$

1.80 $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1+\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$

1.81 $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x$

1.82 $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

1.83 $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x$

1.84 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$

1.85 $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x$

1.86 $\displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-2x+1}\,\mathrm{d}x$

1.87 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

1.88 $\displaystyle\int_0^{1} e^x\sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

1.89 $\displaystyle\int_1^{2} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

1.90 $\displaystyle\int_1^{4} \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

1.91 $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}x$

1.92 $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \sqrt{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

1.93 $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,\mathrm{d}x$

1.94 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

1.95 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x+\sin x\cdot\cos x)\,\mathrm{d}x$

1.96 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

1.97 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$

1.98 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 t\,\mathrm{d}t$

1.99 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x$

1.100 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x \,\mathrm{d}x$

1.101 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} \,\mathrm{d}x$

1.102 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} \,\mathrm{d}x$

1.103 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2 t + \frac{\cos t}{\sin^3 t}\right) \mathrm{d}t$

1.104 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{3+\sin^2 x}} \,\mathrm{d}x$

1.105 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \,\mathrm{d}x$

1.106 $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

1.107 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$

1.108 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$

1.109 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} \,\mathrm{d}x$

1.110 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{3+5\cos x} \,\mathrm{d}x$

1.111 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{6-5\cos x+\cos^2 x} \,\mathrm{d}x.$

V úlohách 1.112 – 1.150 metódou per partes vypočítajte určitý integrál.

1.112 $\displaystyle\int_0^{1} 2x.e^x \,\mathrm{d}x$

1.113 $\displaystyle\int_0^{1} x \cdot e^{2x} \,\mathrm{d}x$

1.114 $\displaystyle\int_0^{1} 9x \cdot e^{3x} \,\mathrm{d}x$

1.115 $\displaystyle\int_0^{1} x \cdot 3^x \,\mathrm{d}x$

1.116 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{0} (2-x) \cdot e^{-3x} \,\mathrm{d}x$

1.117 $\displaystyle\int_0^{4} (5-4x) \cdot e^{\frac{x}{4}} \,\mathrm{d}x$

1.118 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$

1.119 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (4x-1) \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$

1.120 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 2x \,\mathrm{d}x$

1.121 $\displaystyle\int_0^{2\pi} t \cdot \sin\frac{t}{2} \,\mathrm{d}t$

1.122 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x$

1.123 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (3x-1)\cdot\sin 3x\,\mathrm{d}x$

1.124 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x-3)\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x$

1.125 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2x.\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

1.126 $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

1.127 $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x^2\cdot e^x\,\mathrm{d}x$

1.128 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} (9x^2-1)\cdot e^{3x}\,\mathrm{d}x$

1.129 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cdot\sin t\,\mathrm{d}t$

1.130 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x$

1.131 $\displaystyle\int_1^{e} \ln x\,\mathrm{d}x$

1.132 $\displaystyle\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

1.133 $\displaystyle\int_3^{e+2} \ln(x-2)\,\mathrm{d}x$

1.134 $\displaystyle\int_1^{2} x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$

1.135 $\displaystyle\int_1^{e} x^2\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$

1.136 $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1.137 $\displaystyle\int_1^{e^4} \sqrt{x}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$

1.138 $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\ln x}{x^5}\,\mathrm{d}x$

1.139 $\displaystyle\int_1^{e} \ln^2 x\,\mathrm{d}x$

1.140 $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{arctg}\, x\,\mathrm{d}x$

1.141 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{arccotg}\, x\,\mathrm{d}x$

1.142 $\displaystyle\int_0^{1} x\cdot\mathrm{arctg}\, x\,\mathrm{d}x$

1.143 $\displaystyle\int_0^{1} x^2\cdot\mathrm{arctg}\, x\,\mathrm{d}x$

1.144 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$

1.145 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

1.146 $\displaystyle\int_0^{1} (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$

1.147 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$